



Jeux de population : une introduction

Denis PHAN

Ecole Thématique CNRS d'Agay Roches Rouges 8 - 17 mars 2004

version du 5 mars 2004 update :

<http://www-eco.enst-bretagne.fr/~phan/AgayComplexiteSHS/dpdocs/JeuxDePopulation.pdf>



Jeux de population : une introduction



- I - Motivation
- II - Quelques notions de base en théorie des jeux
- III - L'exemple des jeux évolutionnaires symétriques : caractérisation des équilibres.
- IV - L'approche dynamique déterministe & stochastique des jeux de population: réplicateur, imitation et meilleure réponse
- V - Dynamiques sur des réseaux : interactions à courte et longue portée
- VI - représentation évolutionnaire des phénomènes de transition de régimes : les « paysages adaptatifs »



Jeux de population : I - motivation

- Une présentation simple et synthétique de la représentation formelle d'un « jeu » à deux joueurs
- jeux de population et dynamiques évolutives
 - Une première définition d'un **jeu évolutionnaire**
- Quelques modèles et les questions associées :
 - **Emergence et/ou stabilité de la coopération** dans le « dilemme du prisonnier »
 - La hiérarchie cognitive entre agents
 - **Sélection entre équilibre** : la « chasse au cerf », le choix d'un support monétaire et autres histoires...
 - Un jeu de marchandage : **l'équitable et le réalisable** (jeu de l'ultimatum)
- **Intérêt individuel et intérêt collectif ; l'enjeu central : quels fondements pour la modélisation des faits sociaux ?**



Pourquoi utiliser le formalisme de la théorie des jeux ?

- Le langage de la théorie des jeu permet d'étudier (de modéliser) des *situations d'interactions*.
- Comme tout langage formel, il est *réducteur* et *non neutre*, mais il permet d'analyser rigoureusement la cohérence logique du discours, et impose une clarification des hypothèses comportementales et informationnelles.
- Dans un jeu, on doit préciser : le *nombre N* de joueurs, l'*ordre* de leur intervention, l'*ensemble S des actions possibles*, l'*information* dont disposent les joueurs, et les *gains* liés aux différents enchaînement possibles.
- La *forme de la rationalité* attribuée au joueurs est également caractérisée par les règles de décision qu'il appliquent.
- On va s'intéresser à une classe particulière de jeux dits « *non coopératifs* » dans la mesure où chaque joueur effectue son choix de manière isolée, même si ce choix aboutit *in fine* à une « interaction ». En particulier, ils ne peuvent passer entre eux d'accords qui engagent irrévocablement leur choix.



Présentation d'un Jeu sous « forme normale »

- Le jeu ci-dessous, représente les interactions entre 2 joueurs
- Il est symétrique (même structure des gains et même ensemble de stratégies disponibles pour chaque joueur). Ici l'ensemble S des stratégies disponibles est « discret » : $S = \{S_1, S_2\}$
 - Il existe des jeux à plus de deux joueurs, asymétriques et à stratégies continues, mais nous ne les aborderons pas ici.
- La forme adoptée dite « normale » (ou « stratégique »), ne nous permet pas de connaître ni l'ordre des interventions et les enchaînements possibles, ni l'information dont disposent les joueurs au cours de ces enchaînements
 - Ce n'est pas le cas de la forme dite « extensive » qui représente l'arbre de ces enchaînements et l'ensemble des informations dont disposent les joueurs
 - Dans la matrice stratégique, on représente le joueur un en ligne et le joueur 2 en colonne. Le vecteur des gains correspond à : (gain de 1, gain de 2)

	J2 joue S1	J2 joue S2	
J1 joue S1	(5,5)	(4,0)	← Joueur 2 en colonne Gain de 2
J1 joue S2	(0,4)	(3,3)	← Gain de 1

Joueur 1 en ligne →

mars 2004

denis.phan@enst-bretagne.fr Ecole CNRS d'Agay Systèmes Complexes

5



Pourquoi des « jeux de population ? »

- La théorie des jeux « classique » attribue aux joueurs un degré de rationalité sans doute excessif, tout en réduisant les fortement la variété des *dimensions contextuelles de l'interaction* :
- « The analysis puts enormous emphasis on the decision problem, but employs a model of player interaction which is irrelevant to study social organization (...) One significant consequence of the lack of specificity in the modelling of how agents interact with one another is the indeterminacy of equilibrium behavior »
Blume L. (1997) « Population games » in Arthur, Durlauf, Lane (eds.) Economy as an Evolving Complex System II, Addison-Wesley
- Partiellement inspirée de l'approche des « jeux évolutionnaires » initialement développée par les biologistes (Maynard Smith, 1982), Les « *jeux de population* » déplacent l'analyse de la décision individuelle (rationalité affaiblie) vers la *dynamique des interactions* (contextualisée, en particulier sous forme de *réseaux d'interaction*, fixes ou endogènes)

mars 2004

denis.phan@enst-bretagne.fr Ecole CNRS d'Agay Systèmes Complexes

6



- Dans les modèles développées initialement par les biologistes, les *jeux évolutionnaires* peuvent être décomposé selon deux perspectives différentes :
- Le *jeu interne*, qui décrit les *interactions* entre "joueurs".
 - Les "joueurs", appariés au hasard, suivent des stratégies pré-déterminées.
 - L'issue de la confrontation - le *gain* du jeu - détermine la *valeur sélective* des "joueurs"
- Le *jeu externe* décrit le *processus évolutif* lui même.
 - *Il détermine par héritage la part relative des stratégies dans la population* et dépend directement de la valeur sélective que les individus ont retiré de leur confrontation dans le jeu interne.
 - *Il vérifie le principe de sélection* : il contribue à faire augmenter la proportion des individus les mieux « adaptés » à leur environnement.



Un exemple « paradigmatique » : le « dilemme du prisonnier »

	S_1	S_2
S_1	a	b
S_2	c	d

$$c > a > d > b$$

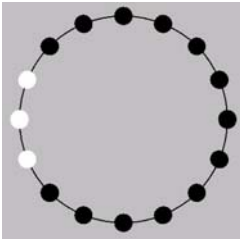
	J2 joue S_1	J2 joue S_2
J1 joue S_1	(5,5)	(0,6)
J1 joue S_2	(6,0)	(3,3)

- Si le joueur 1 joue S_1 face à S_1 et gagne 5, il peut toujours gagner plus en déviant unilatéralement ($6 - 5 = 1$) en jouant S_2 face à S_1 .
- Par contre, s'il joue S_2 , face à S_2 , il n'a aucun intérêt à dévier unilatéralement (il perd alors $3 - 0 = 3$)
- Si le joueur 1 joue S_1 face à S_1 et si son adversaire dévie en S_2 , il perd 5
- Si le joueur 1 joue S_2 , face à S_2 et si son adversaire dévie, il gagne +3
- La stratégie S_2 possède donc un *double avantage* : quand on la joue, on n'a *pas intérêt à en dévier* et elle permet de *maximiser les gains* quelque soit la stratégie jouée par l'adversaire, en particulier dans la situation la pire ($3 > 0$) : celle où l'*adversaire joue aussi S_2* .
- Inconvénient: la situation (5,5) aurait été plus efficace « socialement »



Un exemple de dynamique évolutionnaire contextualisée

- Stabilité de la coopération dans un dilemme du prisonnier spatial avec règle d'imitation (1) le cas de deux voisins



$176 > X \geq 92$:
défection est contenue dans une « zone gelée »

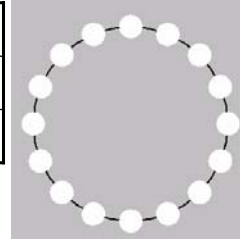
(J_1, J_2)	J_2/S_1	J_2/S_2
J_1/S_1	(X, X)	$(0, 176)$
J_1/S_2	$(176, 0)$	$(6, 6)$

deux stratégies ou « états »

S_1 : coopération (noirs)

S_2 : défection (blanc)

Transition du comportement du système à $X < 92$



$91 \geq X > 6$:
la population entière fait défection

Règle de révision :

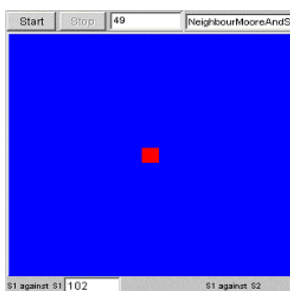
A chaque période, les agents révisent leur stratégie sur la base de leur observation des gains de leurs voisins dans la période précédente.

La règle la plus simple consiste à adopter la stratégie du voisin qui a obtenu le gain (cumulé) le plus élevé lors des deux confrontations bilatérales.

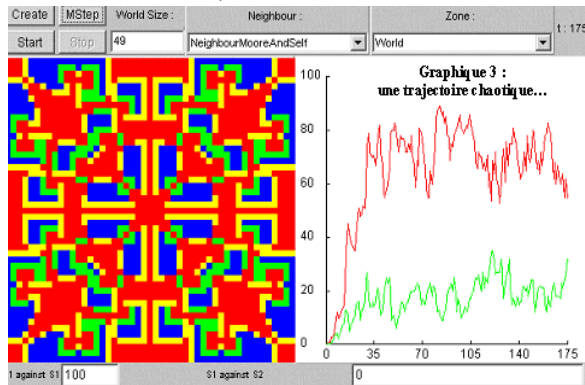


Dilemme du prisonnier spatial et transition complexe

- Dans le modèle de May, Nowak (1992, 1993), on introduit un **défecteur accidentel** dans une **population de coopérateur** qui suivent la **règle d'imitation du meilleur gain** et qui interagissent avec leurs 8 voisins (*voisinage de Moore*) sur un tore (réseau périodique dimension 2)



- Le gain de la coopération S_1 (102) est suffisamment fort pour **bloquer la diffusion de la défection**

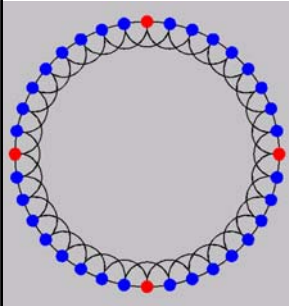


- Si le gain de la coopération tombe à 94, la **défection diffuse complètement**. Entre ces valeurs, la dynamique exhibe un **comportement chaotique**...



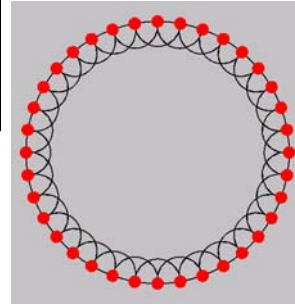
Une application pratique : la régulation d'un groupe par le re-câblage de liens longs (1)

- Pour évaluer la *résistance d'un réseau à une invasion*, on introduit symétriquement 4 défecteur dans un réseau unidimensionnel périodique avec 4 plus-proches voisins



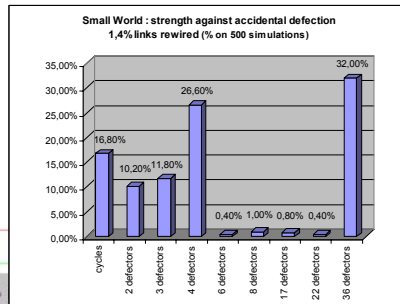
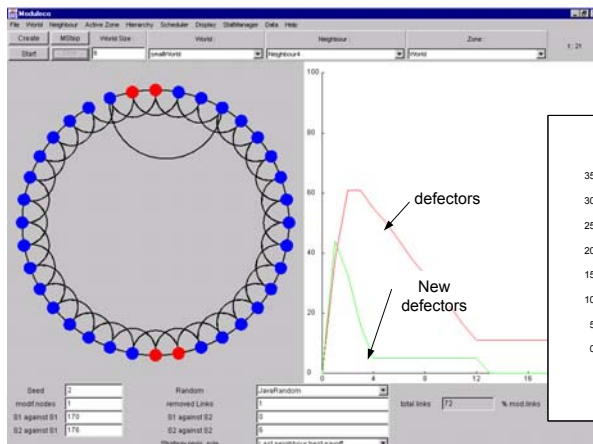
(J_1, J_2)	$J_2/S1$	$J_2/S2$
$J_1/S1$	170, 170	(0, 176)
$J_1/S2$	(176, 0)	(6, 6)

- S1 : coopération S2 : défection
- gain de la coopération $X = 170$
 - Dans le réseau régulier, la population entière passe à la défection



Une application pratique : la régulation d'un groupe par le re-câblage de liens longs (2)

- Dans plus de 50% des cas, il suffit de re-câbler un lien pour contenir le comportement de défection



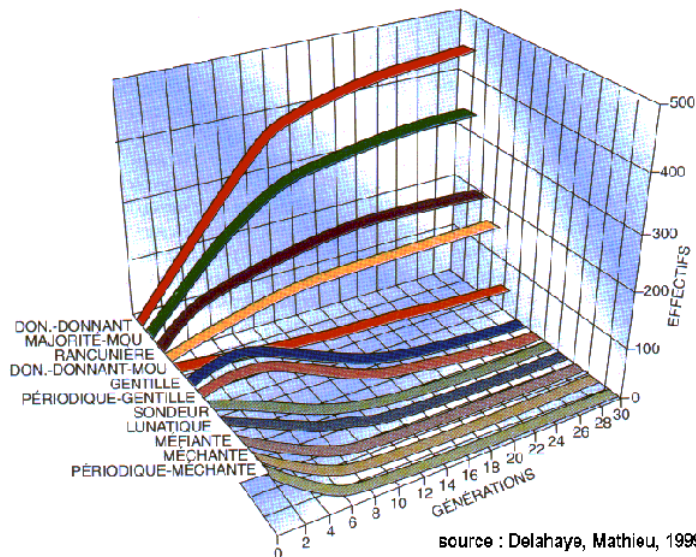


Dilemme du prisonnier itéré (Axelrod)

1. **Donnant donnant** : coopération au premier tour, puis stratégie précédente du partenaire
2. **Majorité-mou** : choix majoritaire de l'adversaire, coopération si égalité au premier tour.
3. **Rancunière** : coopération, puis défection permanente si le partenaire fait une fois défection
4. **Gentille** : toujours coopérer
5. **Périodique gentille** : séquence cyclique ; deux coopération, puis une défection
6. **Sondeur** : séquence trahir, coopérer, coopérer
7. **Lunatique** : défection une fois sur deux en moyenne (séquences aléatoires)
8. **Méfiant** : défection au premier tour, puis stratégie précédente du partenaire
9. **Méchante** : toujours faire défection
10. **Périodiquement méchante** : séquence cyclique ; deux défection, puis une coopération



Dilemme du prisonnier itéré (Axelrod)





- Bernard Walliser (1997) propose une typologie des processus qui permettent de converger vers un équilibre en théorie des jeux. il en distingue quatre, soit par *ordre décroissant des capacités cognitives attribuées aux agents* :
 - Dans un processus **EDUCTIF**, chaque joueur dispose d'assez d'information pour simuler parfaitement le comportement des autres joueurs, ce qui conduit immédiatement à l'équilibre : il n'y a pas d'apprentissage.
 - Dans un apprentissage **EPISTEMIQUE**, chaque joueur modélise le comportement des adversaires et révisé ses croyances à partir des informations qu'ils a pu acquérir par observation (par exemple *fictitious play*, apprentissage bayésien...).
 - Dans un apprentissage **COMPORTEMENTAL**, (*behavioural*), chaque joueur modifie sa stratégie compte tenu des résultats observés de ses propres actions dans le passé (par exemple, apprentissage CPR, par auto renforcement...)
 - Dans un apprentissage **EVOLUTIONNAIRE**, chaque joueur joue une stratégie fixe qui se reproduit proportionnellement au gain obtenu lors de confrontations aléatoires



la « chasse au cerf » (1)

- Les théoriciens de jeux (Harsanyi, Selten 1988, Binmore 1994...) ont été très inspirés par l'histoire de la chasse au cerf (« stag hunt ») tirée du *Discours sur l'origine de l'inégalité parmi les hommes* de J.J. Rousseau (1754)
- « Instruit par l'expérience que l'amour du bien être est le seul mobile des actions humaines, (l'homme social devrait se trouver) en état de distinguer par les occasions rares où l'intérêt commun devait le faire compter sur l'assistance de ses semblables (..) S'agissait-il de prendre un cerf chacun sentait bien qu'il devait pour cela garder fidèlement son poste; mais si un lièvre venait à passer à la portée de l'un d'eux, il ne faut pas douter qu'il ne le poursuivît sans scrupule, et qu'ayant atteint sa proie, il ne se souciât fort peu de faire manquer la leur à ses compagnons »
- En ramenant à deux le nombre des chasseurs et en rendant le problème symétrique, on obtient la matrice suivante :

	S_1	S_2
S_1	a	b
S_2	c	d

$$a > c = d > b$$

	J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(5,5)	(0,3)
J1 joue S2	(3,0)	(3,3)



la « chasse au cerf » (2)

- Les théoriciens des jeux préfèrent la matrice suivante, qui pourrait s'interpréter de la manière suivante : les chasseurs préfèrent chasser le lièvre seuls plutôt qu'à deux. Techniquement, cela renforce « l'attraction » de la stratégie S₂, comme on le verra plus loin.

	S ₁	S ₂
S ₁	a	b
S ₂	c	d

$$a > c > d > b$$

	J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(5,5)	(0,4)
J1 joue S2	(4,0)	(3,3)

- Si l'on recherche les couples de stratégies candidats à l'équilibre en regardant comme précédemment les *situations où il n'est pas avantageux de dévier unilatéralement*, on met en évidence *deux candidats*
- Les *jeux de populations* permettent de mettre en évidence les *conditions contextuelles* selon lesquelles l'un ou l'autre de ces équilibres possibles peut être « sélectionné » par un processus d'apprentissage collectif.



Une dynamique évolutive simplifiée (1)

- Dans ce *jeu de population*, nous considérons une population d'agents et deux supports des échanges, l'argent et l'or (H. Peyton Young, 1998)
- Au début de la période considérée, les agents choisissent au hasard l'une des deux « monnaie ». Ils peuvent choisir de changer de monnaie (de stratégie), mais *ne peuvent échanger qu'entre devises du même type* (gains nuls entre devises différentes, gain positif sinon).
- Dans un premier temps, on considérera que le jeu est parfaitement symétrique, dans un second temps, les gains associés à la détention d'or seront supposés plus élevés
- A chaque « pas » de temps, on tire un agent aléatoirement et on le fait jouer contre toute la population (ou un échantillon « suffisamment large » on discutera + loin de la signification de cette hypothèse). A l'issue de ces jeux, l'agent révisé sa « stratégie ».
 - Avec une probabilité $1 - \epsilon$, il choisit la monnaie la plus présente dans l'ensemble des rencontres qu'il vient de faire. Si il y a égalité stricte, il conserve sa stratégie précédente (inertie)
 - Avec une probabilité ϵ , il choisit une « monnaie » au hasard.



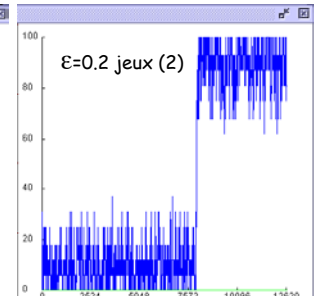
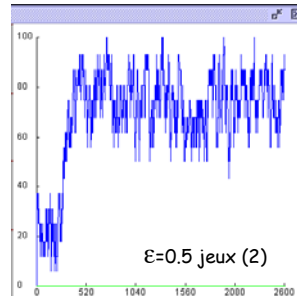
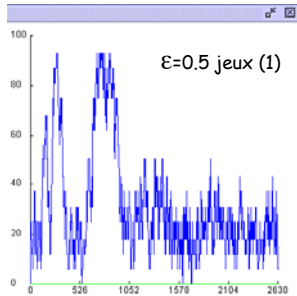
Une dynamique évolutive simplifiée (2)



	J2 joue S1	J2 joue S2		J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(3,3)	(0,0)	J1 joue S1	(5,5)	(0,0)
J1 joue S2	(0,0)	(3,3)	J1 joue S2	(0,0)	(3,3)

Currency game (1)

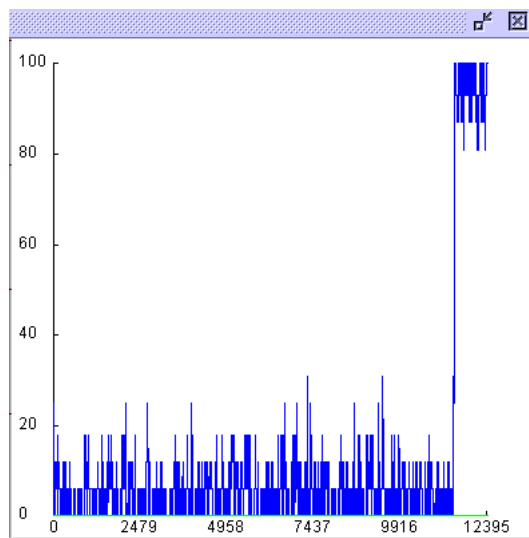
Currency game (2)



- Les simulations (population de taille 16) font apparaître des « **équilibres ponctuels** » séparés par de **brusques changement de régime**. Ces périodes de « **stase** » sont d'autant plus longues que la valeur de ϵ est petite.



dynamique évolutive et émergence de normes



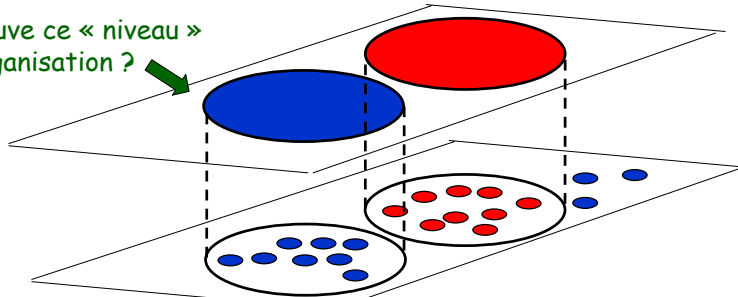
- Certains auteurs ont utilisé une approche en terme de théorie des jeux pour rendre compte de « l'émergence » de normes ou de conventions. (Ullmann-Margalit, 1977 ; Sugden, 1989, 1995 ; Boyer, Orlean, 1992, 1993, 1994 Young, 1996, 1998)
- Dans le cadre proposé il ne s'agit que de « sélection » de stratégies préexistantes...
- Qu'est-ce donc que l'émergence ?



Intermède : émergence ontologique ?

- Dans un système hiérarchisé de complexité croissante, on qualifie d'**émergent** un phénomène ou une entité qui trouve son origine au niveau antérieur.
- Exemple 1 : si je prends des entités élémentaires chlore (Cl) et le sodium (Na) et que je les fais « interagir », je peux obtenir des cristaux de sel (NaCl) qui sont des « entités » émergentes de niveau d'organisation supérieur
- Exemple 2 : dans le modèle de Schelling, la formation de clusters ou « amas » d'habitants de même type est un phénomène (une entité ?) « émergent(e) » des interactions locales entre les agents (habitants)

Où se trouve ce « niveau » d'organisation ?



émergence ontologique et réduction causale

- Selon Searle (1995), ni une entité émergente à partir d'un niveau d'organisation (N) possède au niveau supérieur (N+1) des propriétés ontologiques qui empêchent la réduction à des entités du niveau précédent (N), alors il y a **émergence ontologique**.

Exemple : La « conscience » est « produite » par des interactions neuronales, elles mêmes « produites » par des interactions biochimiques etc... Est-elle une entité « réductible » ?

- Searle (1995) qui pense que non, mais se prétend naturaliste « non-réductionniste » distingue donc **réduction ontologique** de la **réduction causale** :

→ L'émergence ontologique peut selon lui être expliquée dans l'ordre des causes par des interactions entre des entités du niveau inférieur, sans qu'il soit possible pratiquement de déduire les propriétés des entités émergentes de ce système.



Le « dualisme ontologique » de Searle

- Selon la perspective naturaliste non-réductionniste de Searle : la *conscience* est une *structure ontologiquement émergente* (mais non réductible) des micro structures du cerveau.
- Son dualisme ontologique porte sur les *entités* (les objets) :
 - qui « *existent* » *indépendamment d'un observateur* (*caractéristiques intrinsèques* des éléments du monde)
 - qui sont *relatives à l'observateur* (phénomènes mentaux intrinsèques à ce dernier, ontologiquement subjectifs).
- Selon Searle, les phénomènes mentaux sont *ontologiquement subjectifs*, et les *caractéristiques relatives à l'observateur* héritent de cette subjectivité ontologique..
 - « *cet objet est en métal (en or !)* » → *caractéristique intrinsèque*
 - « *cet objet est un pièce de monnaie* » → *caractéristique relative à l'observateur* (ontologiquement subjective)



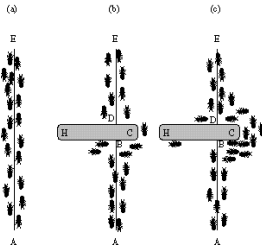
Émergence : le rôle central de l'observateur

- Nous allons définir l'*émergence* comme un *phénomène observé dans un système à plusieurs niveaux* :
 - Il s'agit de *l'identification par un observateur* de nouvelles régularités associées à un processus qui ne peuvent être déduites à partir de la connaissance de seules propriétés des éléments (agents) constitutifs du système (*définition système complexe*)
- Pour définir l'émergence dans les SMA, Müller (2000) souligne la *nécessité* d'un *couplage du processus avec le niveau d'observation du processus*. Un phénomène est émergent si :
 - Il y a un système constitué par ensemble d'agents interagissant entre eux et avec leur environnement dont la *description en tant que processus* est exprimée dans un langage *D*
 - La dynamique de cet ensemble produit un *phénomène structurel global observable* dans des « trace d'exécution ».
 - *Le phénomène global est observé* (1) par un *observateur extérieur* (*émergence faible*) ou (2) par *les agents eux-mêmes* (*émergence forte*) et *décrit dans un langage distinct de D*.



émergence forte et faible (fin intermède)

- L'apport principal: la distinction entre *deux catégories d'émergence selon la position du niveau d'observation par rapport au processus.*



- Dans *l'émergence faible*, l'observateur est extérieur au processus et il n'y a pas nécessairement couplage.
- Dans *l'émergence forte*, les agents sont partie prenante du processus tout en observant ce dernier, ce qui entraîne *de facto* une **rétroaction du niveau d'observation sur le niveau du processus**. L'émergence est *immanente au système*.



Coordination et équité

- Le « jeu de la poule mouillée » (*chicken game*) et la « bataille des sexes » posent des problèmes de coordination et d'équité bien connus

Quelles sont les situations où les joueurs n'ont pas intérêt à dévier unilatéralement?

	S_1	S_2
S_1	a	b
S_2	c	d

$$a < c = d < b$$

	J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(0,0)	(6,3)
J1 joue S2	(3,6)	(3,3)

Poule mouillée

	S_1	S_2
S_1	a	b
S_2	c	d

$$a > d > b = c$$

	J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(6,3)	(1,1)
J1 joue S2	(1,1)	(3,6)

bataille des sexes



Un jeu de marchandage : l'équitable et le réalisable

- La négociation (« *one-shot* » entre paires d'agents) porte sur la répartition (en %) d'un gâteau de « taille » 100.
- Seules les propositions dont la somme $T \leq 100$ sont acceptées (jeu de demande de Nash) > « **Jeu de partage** »

	H = 70	M = 50	L = 30
H = 70	0,0	0,0	70,30
M = 50	0,0	50,50	50,30
L = 30	30,70	30,50	30,30

- Ce jeu fait apparaître des solutions irréalisables ($T > 100$). Dans ce cas, le gain des deux joueurs est nul
- Certaines solutions ne sont pas « équitables » (répartition inégale)
- D'autres encore sont sous-optimales ($T < 100$)
- Une question reste irrésolue : comment sélectionne-t-on un équilibre ?



Intérêt individuel et intérêt collectif

- Les *jeux de population* permettent de formaliser des phénomènes d'apprentissages individuels (les agents adaptent leurs croyances à l'état du « monde ») et collectifs (les agents apprennent à se coordonner)
- Dans de nombreux cas, l'intérêt individuel et le comportement non coopératif d'acteurs décentralisés apparaît insuffisant pour atteindre la situation collectivement la plus souhaitable (« *coordination failure* »).
- La dimension contextuelle, avec des modes variés d'interaction permet de préciser les conditions d'émergence de stabilité de phénomènes dynamiques collectifs présentant certaines conditions de régularités.
- Il s'agit en particulier de la sélection entre équilibres, de l'apparition d'équilibres « ponctués » de transitions entre régimes...
- Une question reste posée : les « faits sociaux » s'ils existent, sont-ils simplement réductibles à ces dynamiques complexes produites par l'interaction en contexte de décisions individuelles reposant sur des croyances individuelles adaptatives ? Dans quelle mesure ces processus peuvent-ils fonder la modélisation des faits sociaux ?
- Pour tenter de répondre à ces questions, il nous faut aller plus loin...



II - Quelques notions de base en théorie des jeux

- Jeux « non coopératifs » et équilibres de Nash
- Correspondance de « meilleur réponse » (1) définition
- Stratégies dominantes et dominées
- Stratégies pures et stratégies mixtes
- Correspondance de « meilleur réponse » (2) représentation graphique : le simplexe
- Le critère de « risque dominance »
- Jeux Potentiels



Jeux « non coopératifs » et équilibres de Nash

- *Un équilibre de Nash correspond à un ensemble de choix stratégiques tel que aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement.*

Le couple de stratégies (S_1, S_1)
est-il un équilibre de Nash ?

Le couple de stratégies (S_2, S_2)
est-il un équilibre de Nash ?

	J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(0,0)	(-10,5)
J1 joue S2	(5,-10)	(-5,-5)

- Soit $S^* = (s^*_1, \dots, s^*_N)$ une combinaison de choix stratégiques de ces n joueurs où : s^*_i est le choix stratégique du joueur i
- Soit $u_i(s^*_i, s^*_{-i})$ le gain du joueur i lorsque S^* est sélectionné.
- Une combinaison de choix stratégique S^* est un *équilibre de Nash* SSI :
 $u_i(s^*_i, s^*_{-i}) \geq u_i(s_i, s^*_{-i})$ pour tout $s_i \in S_i$ et tout $i \in n$



Correspondance de « meilleur réponse »

- Pour un ensemble de stratégie données (quelconque) des autres joueurs, on peut définir la *meilleure réponse* d'un joueur comme :

→ la stratégie qui maximise son gain, conditionnellement aux stratégies données des autres joueurs :

$$\forall i \in n, \tilde{s}_i | (s_{-i}) \in \arg \max_{s_i \in S_i} \{u_i(s_i, s_{-i})\}$$

- On alors également définir un *équilibre de Nash* comme :

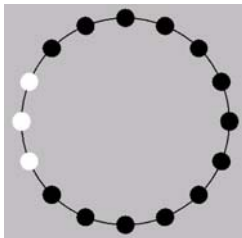
→ le vecteur des choix tel que la stratégie de *chaque acteur est la meilleure réponse aux stratégie des autres acteurs*

$$\forall i \in n, s_i^* \in \arg \max_{s_i \in S_i} \{u_i(s_i^*, s_{-i}^*)\}$$



Un exemple de dynamique évolutionnaire contextualisée

- Stabilité de la coopération dans un dilemme du prisonnier spatial avec règle d'imitation (1) le cas de deux voisins



176 > X ≥ 92 :
défection est contenue dans une « zone gelée »

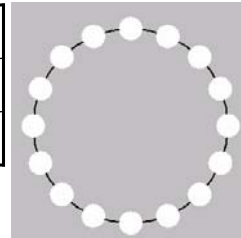
(J ₁ , J ₂)	J ₂ /S ₁	J ₂ /S ₂
J ₁ /S ₁	(X, X)	(0, 176)
J ₁ /S ₂	(176, 0)	(6, 6)

deux stratégies ou « états »

S1 : coopération (noirs)

S2 : défection (blanc)

Transition du comportement du système à X < 92



91 ≥ X > 6 :
la population entière fait défection

Pourquoi un changement de régime à : X < 92 ?



Stabilité de la coopération dans un dilemme du prisonnier spatial (1)

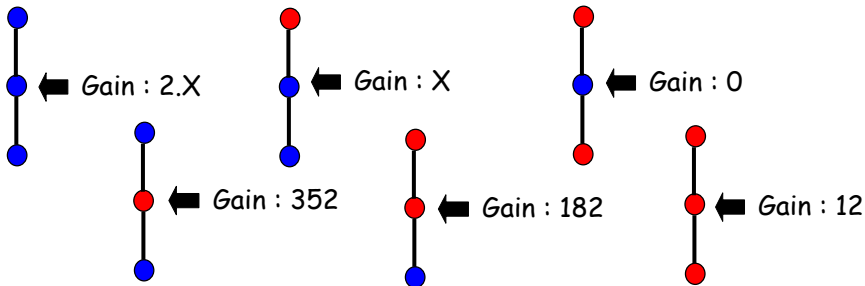
- Interaction sur un réseau périodique dimension 1 (cercle)
- A chaque période, un agent joue la même stratégie avec ses deux voisins. La structure du jeu est celle d'un dilemme du prisonnier

	S_1	S_2	(J_1, J_2)	J_2/S_1	J_2/S_2
S_1	a	b	J_1/S_1	(X, X)	(0, 176)
S_2	c	d	J_1/S_2	(176, 0)	(6, 6)

deux stratégies
 S_1 : coopération
 S_2 : défection
 $176 > X > 6$

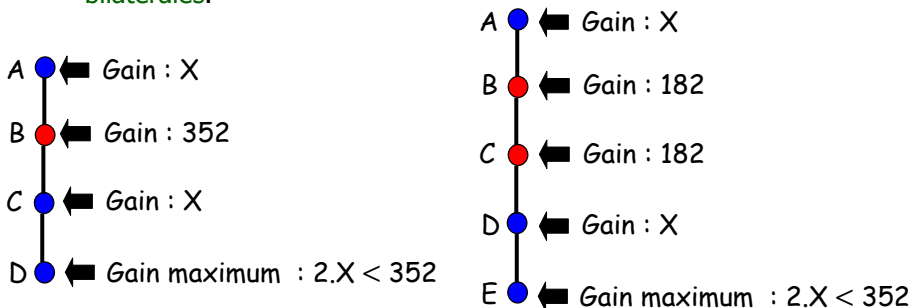
$$c > a > d > b$$

Calculez le gain de l'agent du centre :



Stabilité de la coopération dans un dilemme du prisonnier spatial (2)

- Règle de révision (1) : imitation
 - A chaque période, les agents révisent leur stratégie sur la base de leur observation de la stratégie et des gains de leurs voisins dans la période précédente.
 - La règle la plus simple consiste à adopter la stratégie du voisin qui a obtenu le gain (cumulé) le plus élevé lors des deux confrontations bilatérales.



Les deux voisins de B : A et C deviennent toujours défecteurs

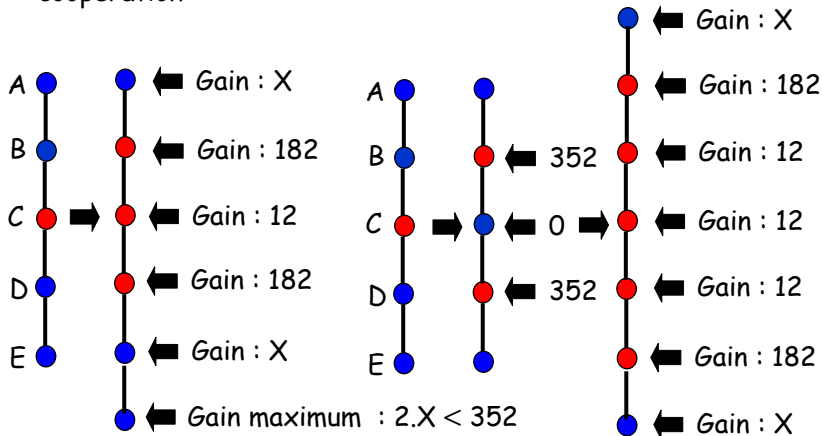
Les deux voisins de B et C (A et D) ne deviennent défecteurs que si $X < 92$



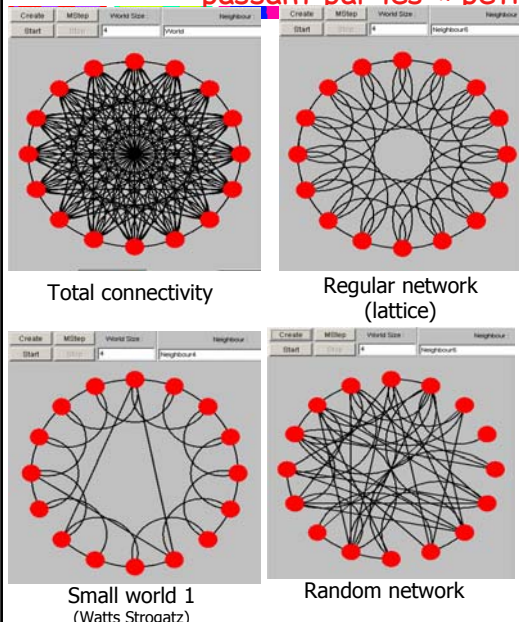
Stabilité de la coopération dans un dilemme du prisonnier spatial (3)

• La dynamique localisée :

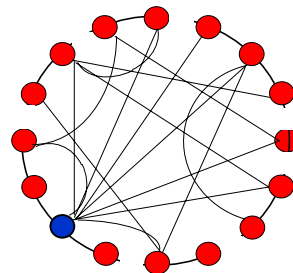
- avec un défecteur sans règle de révision (stratégie fixée)
- Avec un défecteur accidentel (« main tremblante » : retour à la coopération)



Des réseaux réguliers aux réseaux aléatoires en passant par les « petits mondes » (1)



- Milgram (1967)
 - "six degrees of separation"
- Watts and Strogatz (1998)
- Barabasi and Albert, (1999)
 - "scale free"
 - (toutes connectivités)
 - multiplicative process → *power law*
 - *blue agent is "hub" or "gourou"*

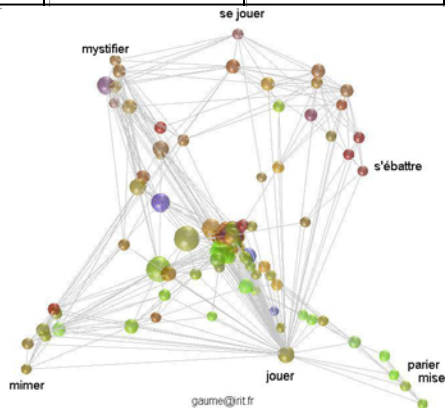




Des réseaux réguliers aux réseaux aléatoires en passant par les « petits mondes » (2)

Quelques réseaux « réels »

	Kevin Bacon G.	W.S.Power Grid	C.Elegans Graph
n number of vertices (agents)	225 226	4941	282
$\langle k \rangle$ average connectivity	61	267	14
L characteristic path length	3,65	18,7	2,65



mars 2004

denis.phan@enst-bretagne.fr Ecole CNRS d'Agay Systèmes Complexes

37



Des réseaux réguliers aux réseaux aléatoires en passant par les « petits mondes » (3)

- *Distance* entre deux nœuds : nombre de liens composant le *chemin le plus court* ; l = distance moyenne
- Dans un *réseau régulier* de dimension d et N sites, la distance l est de l'ordre de grandeur de la taille du système : $l \sim N^{1/d}$
- Dans un *réseau aléatoire poissonnien* de connectivité moyenne k on a : $l \sim \log N$
- Dans un *réseau complètement connecté* on a : $l = 1$!
- Sur un réseau régulier, il n'y a pas de raccourci et pour aller d'un point A à un point B , il faut passer par tous les points intermédiaires.
- Sur le graphe aléatoire on peut relier deux sites par un chemin très court
- *Coefficient de clustering* C : la moyenne du rapport du nombre de liens entre les voisins d'un point donné sur le nombre de liens maximal
 - Réseau complet : 1, aléatoire $\langle k \rangle / (N-1) \sim 1/N$

Amaral, Scala, Barthélemy, Stanley « Classes of Small-world Networks », *PNAS* 97, 11149 (2000)

mars 2004

denis.phan@enst-bretagne.fr Ecole CNRS d'Agay Systèmes Complexes

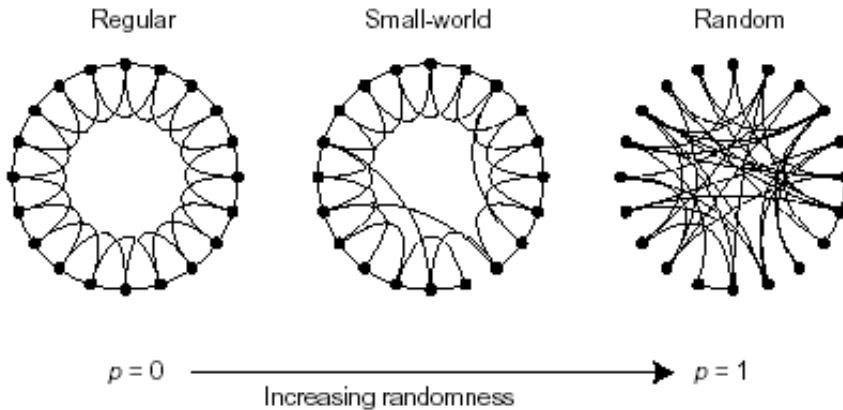
38



Des réseaux réguliers aux réseaux aléatoires en passant par les « petits mondes » (4)

• Petits mondes « à la Watts- Strogatz »

- En partant du *réseau régulier*, on reconnecte au hasard une proportion p de liens. On va donc du réseau régulier à $p = 0$ pour arriver au graphe aléatoire à $p = 1$



Watts, Strogatz (1998) « Collective Dynamics of Small-World Networks », *Nature*, 393, 440.



Des réseaux réguliers aux réseaux aléatoires en passant par les « petits mondes » (5)

• Scale free : petits mondes « à la Barabasi »

- diamètre faible ($l \sim \log N$)
- coefficient de clustering faible $C \sim 1/N$

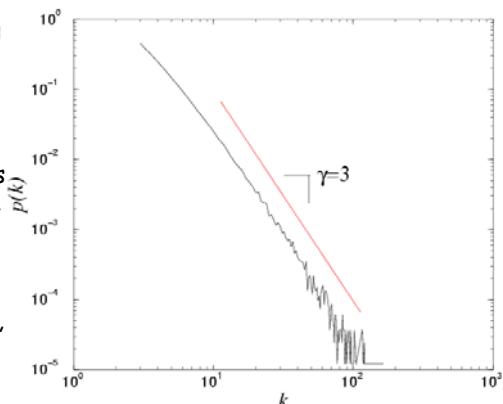
$$P_{i \rightarrow j} = \frac{k_j}{\sum_k k}$$

• (ie attachement préférentiel)

• Distribution de probabilité d'un réseau « scale-free » obtenu par *attachement préférentiel*. On observe bien la loi de puissance avec un exposant $\gamma = 3$.

• Source : Barthelemy M. (2003) Classes de réseaux petits monde Doc. ENST de Bretagne

• ref : Barabási Albert, « Emergence of Scaling in Random Networks », *Science*, 286, 509





(suite)...

- Jeux « non coopératifs » et équilibres de Nash
- Correspondance de « meilleur réponse » (1) définition
- Stratégies dominantes et dominées
- Stratégies pures et stratégies mixtes
- Correspondance de « meilleur réponse » (2) représentation graphique : le simplexe
- Le critère de « risque dominance »
- Jeux Potentiels



Stratégies dominantes et dominées (1)

- Une stratégie s_i est *strictement (faiblement) dominée* par une stratégie s_h si elle procure au joueur des *gains toujours inférieurs (ou égaux)* à ceux associés à l'autre stratégies.

$$\forall s_{-i} \in S, \quad u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(s_h, s_{-i})$$

- Un joueur « qui préfère avoir plus que moins » ne jouera donc jamais une stratégie dominée. Il est fréquent en théorie des jeux d'éliminer les stratégies *strictement* dominée.
- Si une stratégie est la *meilleure réponse face à toutes les stratégies possibles de l'adversaire*, on dit que c'est une *stratégie dominante* (cette stratégie domine toutes les autres stratégies du joueur). L'équilibre de ce jeu est alors appelé équilibre en stratégie dominante.

éliminez la
(les) stratégie(s)
dominée(s) !

	S_1	S_2	S_3
S_1	2, 5	4, 4	4, 5
S_2	1, 3	0, 2	5, 6



Stratégies dominantes et dominées (2)

- Cherchez s'il y a des stratégies dominées (dominantes)

	J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(5,5)	(0,6)
J1 joue S2	(6,0)	(3,3)

Dilemme du prisonnier

	J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(0,0)	(6,3)
J1 joue S2	(3,6)	(3,3)

Poule mouillée

	J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(5,5)	(0,4)
J1 joue S2	(4,0)	(3,3)

Chasse au cerf

	J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(6,3)	(1,1)
J1 joue S2	(1,1)	(3,6)

bataille des sexes



Stratégies pures et stratégies mixtes

- Ce jeu n'a pas d'équilibre en stratégie pure : quelque soit le couple de stratégies envisagé, l'un des joueurs obtient toujours plus en modifiant son choix

Y-a-t-il un équilibre de Nash en stratégie pure ?

	S_1	S_2
S_1	1, -1	-1, 1
S_2	-1, 1	1, -1

- Supposons que l'un des joueurs pense que son adversaire va jouer S_1 avec une probabilité p et S_2 avec une probabilité $1-p$.
- Appelons $\sigma = (p, 1-p)$ cette stratégie. L'espérance de gain anticipée par ce joueur sera :

$$E(S_1) = u(S_1, \sigma) = 1.p - 1.(1-p) = 2.p - 1 ; \text{ s'il joue } S_1$$

$$E(S_2) = u(S_2, \sigma) = -1.p + 1.(1-p) = 1 - 2.p ; \text{ s'il joue } S_2 .$$

• Si : $E(S_1) = E(S_2)$: (c'est à dire ici si $p = 1/2$) ;

aucun des joueurs n'a intérêt à dévier unilatéralement :

c'est l'équilibre en stratégie mixte



Correspondance de « meilleur réponse » (2)

- Notons p_1 (p_2) la probabilité que le joueur 1 (2) joue S_1
- La correspondance $\varphi(p_2)$ de meilleure réponse à n'importe quelle stratégie mixte p_2 est l'ensemble des valeurs de p_1 qui maximise le gain de la stratégie mixte p_1 face à p_2 :

$$\varphi(p_2) = \operatorname{argmax}_{p_1 \in [0,1]} \{u(p_1, p_2)\}$$

$$u(p_1, p_2) = (1-p_1).u(S_2, p_2) + (1-p_1).u(S_2, p_2)$$

$$u(p_1, p_2) = (2.p_2 - 1).p_1 + (1-p_1).(1-2.p_2)$$

$$u(p_1, p_2) = 2.(2.p_2 - 1).p_1 + (1-2.p_2)$$

	S_1	S_2
S_1	1, -1	-1, 1
S_2	-1, 1	1, -1

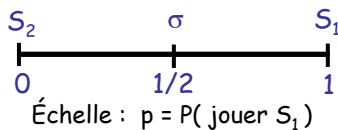
$$\varphi_1(p_2) = \operatorname{argmax}_{p_1 \in [0,1]} \{2.(2.p_2 - 1).p_1 + (1-2.p_2)\}$$

- Si $p_2 > 1/2$; $2.(2.p_2 - 1) > 0$ et $(1-2.p_2) < 0$ $\varphi_1(p_2)$ est maximum ssi $p_1 = 1$
- Si $p_2 = 1/2$. $u(p_1, p_2) = 0 \forall p_1 \in [0,1]$ est maximum pour $\varphi_1(p_2) = [0,1]$
 → (équilibre en stratégie mixte : joueur 1 indifférent)
- Si $p_2 < 1/2$; $2.(2.p_2 - 1) < 0$ et $(1-2.p_2) > 0$ $\varphi_1(p_2)$ est maximum ssi $p_1 = 0$

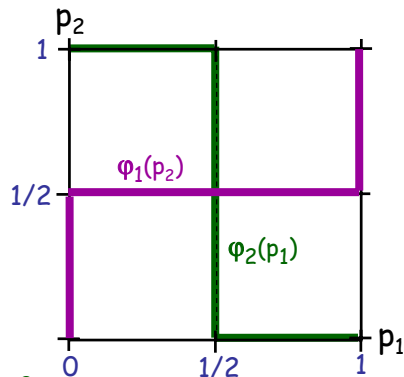


Une représentation géométrique d'une stratégie mixte : le « simplexe »

- Géométriquement, l'ensemble des stratégies mixtes peut être représenté sous la forme d'un *simplexe* de dimension égale au nombre de stratégies pures (de sommets) moins un.



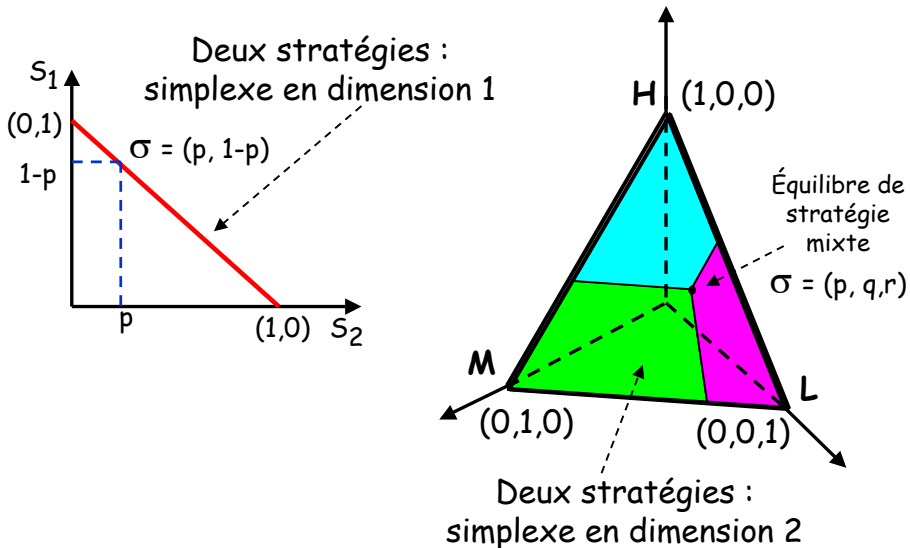
- On peut également représenter (ici sur une surface carrée) les correspondances de meilleures réponse des agents (« *staviska* »)



- Si $p_2 > 1/2$; $\varphi_1(p_2) = 1$ Si $p_1 > 1/2$; $\varphi_2(p_1) = 0$
- Si $p_2 = 1/2$; $\varphi_1(p_2) = [0,1]$ Si $p_1 = 1/2$; $\varphi_2(p_1) = [0,1]$ (équilibre en stratégie mixte)
- Si $p_2 < 1/2$; $\varphi_1(p_2) = 0$ Si $p_1 < 1/2$; $\varphi_2(p_1) = 1$



Simplexes et stratégies mixtes



Le simplexe du jeu de marchandage

$$E(H, \sigma) = 70 \cdot r$$

$$E(M, \sigma) = 50 \cdot (q+r)$$

$$E(L, \sigma) = 30$$

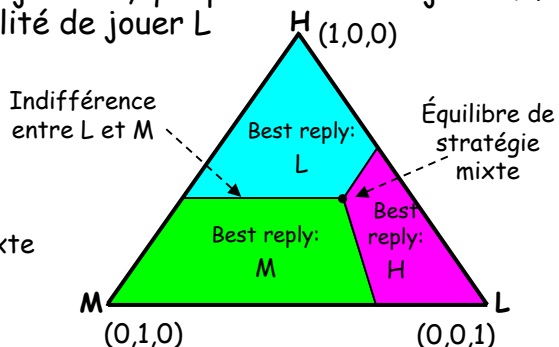
	H = 70	M = 50	L = 30
H = 70	0,0	0,0	70,30
M = 50	0,0	50,50	50,30
L = 30	30,70	30,50	30,30

• Soit p la probabilité de jouer H, q la probabilité de jouer M et $r = (1-p-q)$ la probabilité de jouer L

• On peut déterminer trois zones séparées par des « frontières » ou il y a indifférence entre deux stratégies.

• L'équilibre en stratégie mixte est commun à ces trois « frontières » :

$$\sigma = (14/35, 6/35, 15/35)$$





Le domaine de « meilleure réponse »

- La structure de meilleure réponse correspond à des domaines qui peuvent être définis de manière générale par des relations dans l'espace des gains :

	S_1	S_2
S_1	a, a'	b, b'
S_2	c, c'	d, d'

$$a \geq c ; d \geq b$$

$$u(S_1, \sigma) \geq u(S_2, \sigma) \Leftrightarrow$$

$$p.a + (1-p).b \geq p.c + (1-p).d$$

$$0 \geq -p.(a-c) + (1-p)(d-b)$$

$$(a-c) \geq (1-p).((a-c) + (d-b))$$

$$u(S_1, \sigma) \geq u(S_2, \sigma) \Leftrightarrow \frac{a-c}{(a-c) + (d-b)} \geq 1-p \geq 0$$

$$u(S_2, \sigma) \geq u(S_1, \sigma) \Leftrightarrow \frac{d-b}{(a-c) + (d-b)} \geq 1-p \geq 0$$



Le critère de « risque dominance »

- la structure de meilleure réponse du jeu est conservée si l'on remplace la matrice stratégique par la matrice suivante :

	S_1	S_2
S_1	$a-c, a'-c'$	$0, 0$
S_2	$0, 0$	$d-b, d'-b'$

$$u(S_1, \sigma) \geq u(S_2, \sigma) \Leftrightarrow$$

$$\frac{a-c}{(a-c) + (d-b)} \geq 1-p \geq 0$$

$$a \geq c ; d \geq b$$

- Le ratio $(a-c)/(d-b)$ permet d'apprécier le *risque* auquel fait face le joueur 1 s'il dévie unilatéralement (pour $a \geq c ; d \geq b$);
- On dit que le couple de stratégies (S_1, S_1) est **risque dominé** par le couple (S_2, S_2) SSI : $(a-c).(a'-c') < (d-b).(d'-b')$

Y-a-t-il un couple risque dominé dans la Chasse au cerf ?

	J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(5,5)	(0,4)
J1 joue S2	(4,0)	(3,3)



Jeux Potentiels (1)

- G est un *jeu potentiel (pondéré)* si il existe une fonction ρ (et des nombres positifs λ_i) telle que pour tout ensembles de stratégies (s_i, s_{-i}) et (s_h, s_{-i}) on ait :

$$\lambda_i(u(s_i, s_{-i}) - u(s_h, s_{-i})) = \rho(s_i, s_{-i}) - \rho(s_h, s_{-i})$$

- La *même fonction de potentiel doit s'appliquer à tous les joueurs.*
- Les fonctions de gains peuvent ainsi être re-dimensionnées de telle manière qu' *en cas de déviation unilatérale la variation du gain soit égale à celle du potentiel*: les deux fonctions ont la même structure de meilleure réponse
- Tout jeu symétrique 2x2 est un jeu potentiel

	s_1	s_2
s_1	a, a'	b, b'
s_2	c, c'	d, d'

$$\begin{aligned} \rho(s_1, s_1) &= a - c \\ \rho(s_1, s_2) &= 0 \\ \rho(s_2, s_2) &= d - b \\ \rho(s_2, s_1) &= 0 \end{aligned}$$

$$a \geq c ; d \geq b$$



Jeux Potentiels (2)

- Trouvez des fonctions (utiles à l'analyse des équilibres) qui conservent la perte de gain en cas de déviation unilatérale pour les jeux suivants :

	J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(5,5)	(0,6)
J1 joue S2	(6,0)	(3,3)

Dilemme du prisonnier

	J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(0,0)	(6,3)
J1 joue S2	(3,6)	(3,3)

Poule mouillée

	J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(5,5)	(0,4)
J1 joue S2	(4,0)	(3,3)

Chasse au cerf

	J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(6,3)	(1,1)
J1 joue S2	(1,1)	(3,6)

bataille des sexes



Jeux Potentiels (3)

	J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(-1,-1)	(0,0)
J1 joue S2	(0,0)	(3,3)

Dilemme du prisonnier

	J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(1,1)	(0,0)
J1 joue S2	(0,0)	(3,3)

Chasse au cerf

	J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(-3,-3)	(0,0)
J1 joue S2	(0,0)	(-3,-3)

Poule mouillée

	J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(5,2)	(0,0)
J1 joue S2	(0,0)	(2,5)

bataille des sexes

Interprétations ?



Stratégie Evolutionnairement Stables (ESS)

• C'est "une stratégie telle que si elle est adoptée par tous les membres d'une population, aucune stratégie mutante ne pourra venir envahir cette population par les mécanismes de la sélection naturelle »

• Equilibre de Nash, + condition de stabilité $\forall x, y \in S$

soit : $u(x, x) > u(y, x)$ (a)

▪ le gain associé à la stratégie x contre elle-même est strictement supérieur au gain associé à n'importe quelle autre stratégie y différente de x contre la stratégie x. (la stratégie x est la meilleure réponse contre elle même)

soit : $u(x, x) = u(y, x)$ (b1)

et :

$u(x, y) > u(y, y)$ (b2)



Le jeu des "faucons" et des "colombes" » (1)

- On considère une large population d'individus de *même espèce* en compétition pour utiliser une *ressource rare*.
- Chaque jeu représente la *confrontation aléatoire de deux individus* (et seulement deux) de cette espèce (« *random pairwise* »).
- Ceux-ci peuvent suivre 2 stratégies : une *stratégie agressive "Hawk"* ou une *stratégie pacifique "Dove"*.
- Lorsque deux "faucons" se rencontrent, ils supportent des *pertes* qui peuvent être évaluées en moyenne à $C/2$

	H	D
H	$(V-C)/2, (V-C)/2$	$V, 0$
D	$0, V$	$V/2, V/2$

Y a-t-il des ESS en stratégie pure en fonction des valeurs relatives de V et C ?



"faucons" vs "colombes" (2) stratégies pures

	H	D
H	$(V-C)/2, (V-C)/2$	$V, 0$
D	$0, V$	$V/2, V/2$

- Si $V > C$; H est une *stratégie strictement dominante* (Nash strict, ESS)

en effet : $u(H, H) = (V - C)/2 > u(D, H) = 0$ (a)

alors que : $u(D, D) = V/2 < u(H, D) = V$

- Si $V = C$; H est une *stratégie faiblement dominante* (Nash et ESS)

en effet : $u(H, H) = u(D, H) = 0$ (b1)

mais : $u(H, D) = V > u(D, D) = V/2$ (b2)

- Si $V < C$, ni H ni D ne sont des stratégies dominantes :

$u(H, H) = (V - C)/2 < u(D, H) = 0$ et $u(D, D) = V/2 < u(H, D) = V$;

la condition (b2) ne peut être vérifiée : *pas d'ESS en stratégie pure*



"faucons" vs "colombes (2) stratégies mixtes

- On considère une population composée de $p\%$ de faucons et de $(1-p)\%$ de colombes. La probabilité de rencontrer l'une ou l'autre de ces stratégies lors d'une rencontre aléatoire est donc la *stratégie mixte* σ :

$$\sigma = (p, 1-p); \text{ avec : } p = \text{prob}(H) \text{ et } 1-p = \text{prob}(D)$$
- Si $V > C$, $\sigma_H = (1, 0) = H$ est une stratégie *strictement dominante* ;

$$u(\sigma_H, \sigma_H) > u(\sigma, \sigma_H), \quad \forall \sigma / 0 \leq p < 1,$$
- Si $V = C$, $\sigma_H = (1, 0) = H$ est une stratégie *faiblement dominante* ;

$$u(\sigma_H, \sigma_H) > u(\sigma, \sigma_H), \quad \forall \sigma / 0 \leq p < 1, \text{ avec : } V \geq u(\sigma_H, \sigma) > u(\sigma, \sigma) \geq V/2$$
- Si $V < C$, une stratégie mixte où : $\sigma = (p, 1-p)$, avec : $0 < p < 1$ peut conduire à un ESS

$$u(H, \sigma) \equiv E(H) = u(D, \sigma) \equiv E(D)$$

$$\Rightarrow p.u(H, H) + (1-p).u(H, D) = p.u(D, H) + (1-p).u(D, D)$$

$$p.(V-C)/2 + (1-p).V = p.0 + (1-p).V/2 \quad \Rightarrow \quad p = V/C$$

→ On vérifie ensuite que la condition de stabilité est vérifiée/



"faucons" vs "colombes (3) stratégies mixtes

- La valeur $p = V/C$ définit l'équilibre de Nash symétrique en stratégie mixte :
- la stratégie mixte $\sigma = (V/C, 1-V/C)$ est la "meilleure réponse" contre elle-même".
- On vérifie que la condition de stabilité est vérifiée :
 - Pour que ce soit également un ESS, il faut ensuite montrer qu'aucune stratégie déviante ne peut venir envahir cette population (condition (b2) : $u(x, y) > u(y, y)$)
 - Comme $u(H, \sigma) \equiv E(H) = u(D, \sigma) \equiv E(D) = u(\sigma, \sigma)$, la condition de stabilité requiert :

$$u(\sigma, D) > u(D, D) \text{ et } u(\sigma, H) > u(H, H)$$

$$u(\sigma, D) = p.V + (1-p).V/2 = (1+p).V/2 > u(D, D) = V/2$$

$$u(\sigma, H) = p.(V-C)/2 + (1-p).0 = p.(V-C)/2 > u(H, H) = (V-C)/2$$

(où $(C-V)/2 > p.(C-V)/2$ est vérifié puisque : $C > V$ et $0 < p \leq 1$)



IV - L'approche dynamique déterministe & stochastique des jeux de population : réplicateur, imitation et meilleure réponse

V - Dynamiques sur des réseaux : interactions à courte et longue portée

VI - représentation évolutionnaire des phénomènes de transition de régimes : les « paysages adaptatifs »

../..



- On considère une *entité, porteuse d'une stratégie donnée*, qui se reproduit à l'identique (elle se réplique).
- On suppose que la population de ces *réplicateurs*, associés à une stratégie déterminée, varie dans l'intervalle de temps δt selon un taux juste égal à son espérance de gain :
- On a entre t et $t+\delta t$: $\Delta N_1/N_1 = E(S_1)$ et : $\Delta N_2/N_2 = E(S_2)$
- La *proportion de S_2* dans la population est $p = N_2/N$
- on a donc : $\Delta p/p \approx \Delta N_2/N_2 - \Delta N/N$
- Mais on peut remplacer approximativement le taux de croissance de la population par le taux de croissance de ses composantes pondéré par leur parts restrictives :

$$\Delta N/N \approx (1-p) \cdot \Delta N_1/N_1 + p \cdot \Delta N_2/N_2 = (1-p) \cdot E(S_1) + p \cdot E(S_2)$$
- Finalement : $\Delta p/p \approx E(S_2) - [(1-p) \cdot E(S_1) + p \cdot E(S_2)]$
- Le taux de répliation d'une stratégie est égal à son espérance de gain, moins la moyenne des espérance de gain dans la population.

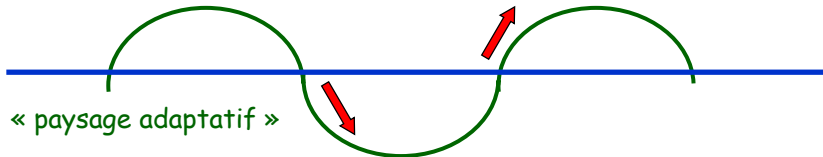


La transmission des stratégies par réplicateur

- Le taux de réplication d'une stratégie est égal à son espérance de gain, moins la moyenne des espérance de gain dans la population.

$$\Delta p/p \approx E(S_2) - [(1-p).E(S_1) + p.E(S_2)]$$

→ Une population croît ssi son espérance de gain est supérieur à l'espérance de gain moyenne



- On peut aussi écrire le réplicateur sous la forme :

$$\Delta p/p \approx (1-p).[E(S_2) - E(S_1)]$$

- Où il est clair que $\Delta p/p > 0$ ssi : $E(S_2) > E(S_1)$



La transmission des stratégies par réplicateur

- Remarque : dans un jeu symétrique, $E(S_1) - E(S_2) = 0$ nous donne l'équilibre en stratégie mixte, donc on peut montrer que l'on a : $E(S_1) - E(S_2) = k.(p-p^*)$

$$\Delta p/p \approx k.(1-p)(p-p^*)$$

Exemple : le chasse au cerf

	J2 joue S1	J2 joue S2
J1 joue S1	(5,5)	(0,4)
J1 joue S2	(4,0)	(3,3)

Chasse au cerf

$$E(S_2) - E(S_1) = (3 - 0).p - (5 - 4).(1 - p) = 4.p - 1$$

A l'équilibre de stratégie mixte, on a : $E(S_1) - E(S_2) = 0$

Avec : $\sigma = (p^*, 1-p^*)$ où : $p^* = 1/4$

$$\Delta p/p \approx 4.(1-p)(p - 0,25)$$

$E(S_2) > E(S_1)$ et $\Delta p/p > 0$ ssi $p > 1/4$

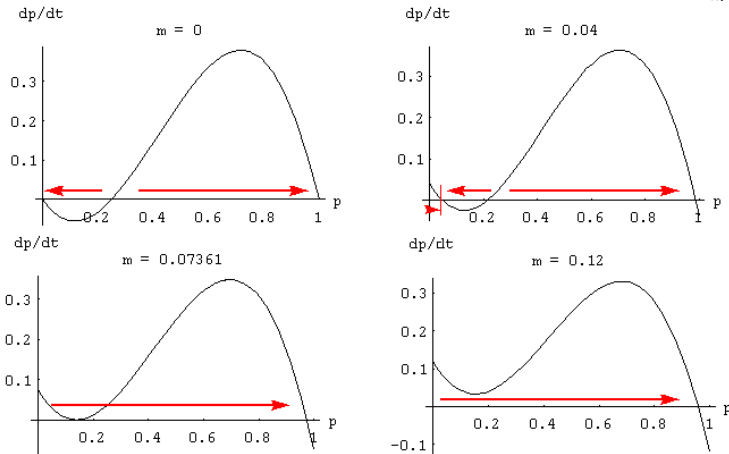


L'équation de réplication avec taux de mutation déterministe



$$dp/dt = k.p.(1 - p).(p - p^*) + m.p$$

- En l'absence de mutations ($m=0$) il y a deux points fixes stables: $p_{inf} = 0$; et $p_{sup} = 1$ séparés par un point fixe instable, $p^*=1/4$.
- Pour $m > 0$, la taille du bassin d'attraction de p_{inf} diminue, celui de p_{sup} augmente.
- Au-delà du "point de catastrophe" : $m \neq 0,07361$, les deux points fixes p^* et p_{inf} disparaissent



mars 2004

denis.phan@enst-bretagne.fr Ecole CNRS d'Agay Systèmes Complexes

63



choix entre deux solutions alternatives (1)



- Considérons la fonction de surplus suivante :

$$V_i(s_i) = V_{0i} + s_i \left(H_i + X + J \cdot \sum_{k \in \emptyset} \frac{s_k}{N_i} \right); \quad s_i \in \{-1, +1\}$$

- H_i désigne les préférences idiosyncrasiques de l'agent, et X une variation de surplus de valeur exogène, mais de signe dépendant du choix de l'agent (par exemple un transfert monétaire en (dé)faveur d'une alternative)
- Comme dans le cas précédent, la valeur de H (de X) exprime le biais personnel (exogène) de l'agent en faveur de l'une ou l'autre des alternatives.
 - Si $(H_i + X) < 0$ il y aura un biais en faveur du choix : $s_i = -1$
 - Si $(H_i + X) > 0$ il y aura un biais en faveur du choix : $s_i = +1$

mars 2004

denis.phan@enst-bretagne.fr Ecole CNRS d'Agay Systèmes Complexes

64



choix entre deux solutions alternatives (2)

- Désignons par: η_i^+ et η_i^- la proportion des voisins de l'agent « i » qui choisissent respectivement $S_k = +1$ et $S_k = -1$

$$\sum_{k \in \Theta} \frac{S_k}{N_i} = (\eta_i^+ - \eta_i^-) \quad \text{avec: } \eta_i^+ + \eta_i^- = 1$$

$$V_i(s_i) = V_{0i} + s_i(H_i + X + J \cdot (\eta_i^+ - \eta_i^-)); \quad s_i \in \{-1, +1\}$$

- L'influence sociale, pondérée par J , mesure le « degré de conformité » entre le choix de l'agent et ceux de son voisinage.
- Cet effet dépend de la *proportion des agents* qui choisissent chaque branche de l'alternative (η_i^+ et η_i^-)
- Remarque : on reproche le modèle de demande précédent si on pose :

$$P = -X; \quad \text{et: } \omega_i = \frac{s_i + 1}{2}$$



Liens avec la théorie des jeux

- Chaque agent (joueur) dispose de deux choix alternatifs (deux « stratégies »). On peut représenter la part du surplus associée à chaque confrontation entre deux voisin par une matrice représentant un jeu symétrique sous forme « normale » :

	$S_2 = -1$	$S_2 = +1$		$S_2 = -1$	$S_2 = +1$
$S_1 = -1$	$V_{0\partial i} + J_{\partial i} - H_{\partial i} - X_{\partial i}$	$V_{0\partial i} - J_{\partial i} - H_{\partial i} - X_{\partial i}$	$S_1 = -1$	8	0
$S_1 = +1$	$V_{0\partial i} - J_{\partial i} + H_{\partial i} + X_{\partial i}$	$V_{0\partial i} + J_{\partial i} + H_{\partial i} + X_{\partial i}$	$S_1 = +1$	2	10

- Où : $V_{0\partial i} \equiv V_{0i} / N_{\partial i}$; $H_{\partial i} \equiv H_i / N_{\partial i}$; $X_{\partial i} \equiv X / N_{\partial i}$; $J_{\partial i} \equiv J / N_{\partial i}$
- A droite : $V_{0\partial i} = 5$; $H_{\partial i} = 2$; $X_{\partial i} = -1$; $J_{\partial i} = 4$;



Eléments de bibliographie

- Ouvrages de base incorporant les jeux de population
 - Herbert Gintis (2000) *Game theory evolving*, Princeton University Press, NJ
 - Gisèle Umbhauer (2002) *Théorie des jeux appliquée à la gestion* EMS editions.
- Pour aller plus loin avec l'apprentissage et les jeux évolutionnaires
 - Robert Axelrod (1984) *The Evolution of Cooperation*; Basic Book, NY. trad.fr. *Donnant, Donnant. Théorie du comportement coopératif*, Odile Jacob, Paris 1992.
 - Larry Samuelson (1997) *Evolutionary Games and Equilibrium selection*, MIT Press
 - H. Peyton Young (1998) *Individual Strategy and Social Structure*, Princeton Univ. Press
 - Drew Fudenberg, David K. Levine (1998) *The Theory of Learning in Games*, MIT Press
- Pour aller plus loin avec la théorie des jeux « classique »
 - Gabrielle Demange, J-P. Ponssard (1994) *Théorie des jeux et analyse économique*, PUF
 - Drew Fudenberg, Jean Tirole (1991) *Game Theory*, MIT press.
- prendre du recul et interpréter
 - Ken Binmore (1992) *Fun and Games*, Heath&Co, trad.fr *Jeux et théorie des jeux*, DeBoek
 - Christian Schmidt (2001) *La théorie des jeux. Essai d'interprétation*, PUF
- Références complémentaires complexité, cognition et interactions
 - Arthur W.B., Durlauf S.N., Lane D.A. (eds). (1997) ; *The Economy as an Evolving Complex System II*; SFI, Studies on the Sciences of Complexity, Addison-Wesley.
 - Steven Durlauf, H. P. Young eds. (2001) *Social Dynamics*, Brooking Instit. & MIT press
 - Paul Bourguine, J-P. Nadal eds. (2004) *Cognitive Economics*, Springer



« Paysage adaptatif »

- Le taux de réplication d'une « variété » est égal à son espérance de reproduction, moins la moyenne des espérance de reproduction de la population.

$$\Delta p_i / p_i \approx E(S_i) - E(S)$$

→ Une variété croît ssi son espérance de gain est supérieur à l'espérance de gain moyenne

